NEFN 4

3. SPEKTRUM OPERÁTORU

- <u>Definice.</u> Buď X <u>komplexní</u> Banachův prostor a $A \in \mathcal{L}(X)$.

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \}$$

... <u>resolventa</u> A

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

... <u>spektrum</u> A

- <u>Definice.</u>

- $\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ není prosté} \}$

  ... <u>bodové spektrum</u>

  (λ... <u>vlastní číslo</u> A)

- $\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ je prosté, není na, } \operatorname{Im}(\lambda I - A) \text{ je hustý v } X \}$

  ... <u>spojité spektrum</u>

- $\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda I - A \text{ je prosté, } \operatorname{Im}(\lambda I - A) \text{ není hustý v } X \}$

  ... <u>residuální spektrum</u>

• **Věta.** Nechť X je komplexní Banachův prostor a $A \in \mathcal{L}(X)$.

Pak $\rho(A)$ je otevřená množina a $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$

($\Rightarrow \sigma(A)$ je kompaktní množina)

Důkaz. $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$

a $\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \in \mathcal{L}(X)$, $\quad \left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$

a proto $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \in \mathcal{L}(X)$

Buď $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Pak

$$\lambda I - A = (\lambda - \lambda_0) I + (\lambda_0 I - A) =$$

$$= (\lambda_0 I - A) \cdot \left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right],$$

a proto, je-li

$$1 > \|(\lambda_0 - \lambda) \cdot (\lambda_0 I - A)^{-1}\| = |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|,$$

je $(\lambda I - A)^{-1} = [\qquad\qquad]^{-1} \cdot (\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Tedy $|\lambda_0 - \lambda|$ „malé" $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

$\Rightarrow \rho(A)$ je otevřená množina

cbd.

- Pozorování.

$$\boxed{\sigma(A) \neq \emptyset \quad \text{pro každé } A \in \mathcal{L}(X)} \quad (X \neq \{0\})$$

Dk. Sporem. Buď $\mathbb{C} = \rho(A)$.

Pak $\forall x \in X\ \forall f \in X^*$:

$$\varphi(\lambda) \overset{\text{df.}}{=} f\left((\lambda I - A)^{-1} x\right) \text{ je holomorfní na } \mathbb{C}$$

Navíc:

$|\lambda| > \|A\|$:

$$|\varphi(\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|(\lambda I - A)^{-1}\| \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|x\| \cdot \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq$$

$$\leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} \to 0 \quad \text{pro } |\lambda| \to \infty,$$

tzn. φ je omezená

A z Liouvilleho věty plyne, že $\varphi \equiv 0$.

Zjistili jsme, že $\forall f \in X^* \, \forall x \in X : f\left((\lambda I - A)^{-1} x\right) = 0$,

a proto $\forall x \in X : (\lambda I - A)^{-1} x = 0$,

a to je spor

cbd.

Věta.

Nechť
- H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$ nebo nad $\mathbb{R}$
- $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ je lineární symetrický op.

Pak

(i) $\forall u \in \mathcal{D}(A) : (Au, u) \in \mathbb{R}$,

(ii) všechna vlastní čísla A jsou reálná

(iii) vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální, tzn.

$$\left.\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ay &= \mu y \\ \lambda &\neq \mu \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x, y) = 0 .$$

- **Věta.** Nechť
  - H je Hilbertův prostor $\neq \{0\}$
  - A samoadjungovaný (a lin. spoj.) na H

Pak

i) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$,

ii) $m := \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M := \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) \in \sigma(A)$,

iii) $\sigma(A) \subset \langle m, M \rangle \subset \mathbb{R}$

- **Příklad.**

$$T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$

$$(Tu)(x) := x \cdot u(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

Pak
- T je samoadjungovaný operátor
- $\sigma(T) = \langle \underset{m}{\overset{\shortparallel}{0}}, \underset{M}{\overset{\shortparallel}{1}} \rangle$
- T nemá žádné vlastní číslo !

Věta. Buď
- X komplexní Banachův pr.
- $A \in \mathcal{C}(X)$

Pak

(i) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ je nejvýše spočetná množina vlastních čísel konečné násobnosti

(ii) $\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(A)$

(iii) je-li λ hromadným bodem $\sigma(A)$, je $\lambda = 0$.

Poznámka. Za situace z předchozí věty mohou pro $\lambda = 0$ nastat tyto 4 možnosti:

1) $0 \in \sigma(A)$, $\lambda = 0$ je vlastní číslo
$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - A) < \infty$,

2) $0 \in \sigma(A)$, $\lambda = 0$ je vlastní číslo
$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \infty$,

3) $0 \in \sigma(A)$, $\lambda = 0$ není vlastní číslo,

4) $0 \notin \sigma(A)$ $(\Rightarrow \dim X < \infty)$

Věta (Hilbert–Schmidtova teorie)

Nechť
- $H \neq \{0\}$ je separabilní Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$ nebo nad $\mathbb{R}$,
- $A: H \to H$ je lineární, kompaktní, symetrický na H.

Pak tvoří ortonormální posloupnost (e_n) všech vlastních funkcí operátoru A ON-bázi prostoru H.

Pozorování. Za situace z předchozí věty: je-li $\forall n \in \mathbb{N}: A e_n = \lambda_n e_n$,

je $\forall x \in H: \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$, a proto

$$\boxed{A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (x, e_n) \cdot e_n}$$

Příklad. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená oblast s lipsch. hranicí.

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u = v & \text{v } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{matrix} W_0^{1,2}(\Omega) \\ \parallel \end{matrix}$$

Víme: $\forall v \in L^2(\Omega)\ \exists!\, u \in H_0^1(\Omega)\ \forall w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w = \int_\Omega v w$$

Značme tuto $u =: Kv$.

$$\left(\text{Tedy } \begin{matrix} -\Delta u = v \\ u = 0 \end{matrix} \iff Kv = u \right)$$

Tedy $\boxed{K : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)}$ a zřejmě

$$\boxed{K \text{ je } \begin{matrix} \bullet \text{ lineární} \\ \bullet \text{ omezené} \end{matrix}}$$

$$\Big(\|Kv\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega v u \le \sqrt{\int_\Omega v^2} \sqrt{\int_\Omega u^2} \le$$

$$\le \|v\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sqrt{\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2} \le \|v\|_{L^2} \cdot C \cdot \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2} =$$

Friedrichs $\equiv$ Poincaré

$$= C \cdot \|Kv\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{L^2}, \quad \text{a proto}$$

$$\|Kv\|_{H_0^1} \le \tilde{C} \cdot \|v\|_{L^2} \Big)$$

Nyní využijeme faktu, že $H^1_0(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$

a že složení spoj. lin. operátoru s kompaktním je kompaktní operátor.

Takže

$$\boxed{K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{je lineární, spojitý, kompaktní}}$$

Nyní uvažujme úlohu na vlastní čísla:

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases}$$

Zřejmě každé vlastní číslo je nenulové $\left(\begin{matrix} -\Delta u = 0 \\ u = 0 \end{matrix} \text{ má pouze triviální řešení} \right)$

Všimněme si (pro $\lambda \neq 0$):

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow K(\lambda u) = u \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} u - K u = 0,$$

tzn. λ je vlastním číslem $(*)$

$$\Updownarrow$$

$\mu := \frac{1}{\lambda}$ je vlastním číslem kompaktního operátoru K

Nyní uvažujme Dirichletovu úlohu pro Helmholtzovu rovnici:

$$\boxed{(H)\quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$ a $\lambda \neq 0$.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f \\ u = 0 \end{cases} \iff K(\lambda u + f) = u$$

$$\Updownarrow$$

$$(I - \lambda K)u = Kf$$

- není-li λ vlastním číslem (*), má úloha (H) právě jedno (slabé) řešení pro každé $f \in L^2(\Omega)$

(viz Fredholmova alternativa – NEFN 2 – str. 12)

(*)

- je-li λ vlastním číslem (*), má (H) řešení právě tehdy, je-li

$$\int_\Omega f \varphi = 0 \text{ pro každou vlastní funkci } \varphi \text{ příslušnou vlastnímu číslu } \lambda$$

$$\left(\text{tj. } \begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda \varphi \\ \varphi = 0 \end{cases}\right)$$

(viz NEFN 2 – tvrzení (iii) na str. 12 a tvrzení (iv) na str. 5)

Důkaz (X).

1) Nejprve si ukážeme, že operátor $I-\lambda K$ je samoadjungovaný na $L^2(\Omega)$.

K tomu (protože $I-\lambda K$ je ohraničený na celém $L^2(\Omega)$) stačí ukázat, že je symetrický.

Tzn., že $\forall u,v \in L^2(\Omega)$:

$$(u-\lambda K u, v) = (u, v-\lambda K v)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda K u, v) = (u, \lambda K v)$$

$$\Updownarrow$$

$$(Ku, v) = (u, Kv)$$

Víme

$$-\Delta(Ku) = u \qquad\qquad -\Delta(Kv) = v$$

$$Ku = 0 \qquad\qquad Kv = 0$$

$$\int \nabla(Ku)\nabla w_1 = \int u w_1 \qquad\qquad \int \nabla(Kv)\nabla w_2 = \int v w_2$$

volme $w_1 = Kv$

$w_2 = Ku$

Dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} \int \nabla(Ku)\nabla(Kv) &= \int u\, Kv = (u, Kv) \\ \| \quad & \qquad\qquad\quad \| \\ \int \nabla(Kv)\nabla(Ku) &= \int v\, Ku = (v, Ku) \end{aligned}}$$ dok 1)

2) Z tvrzení iii) – NEFN 2 – str. 12
iv) – NEFN 2 – str. 5

plyne, že $(I-\lambda K)u = Kf$ $\left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u + f \\ u = 0 \end{array}\right)$

má řešení (tzn. $Kf \in Im(I-\lambda K)$)

právě tehdy, platí-li

$$\boxed{F \in Ker(I-\lambda K)^* \Longrightarrow F(Kf) = 0}$$

$$\| \leftarrow \text{viz } 1)$$

$$Ker(I-\lambda K)$$

Takže (H) má řešení právě tehdy, platí-li

$$F = \lambda K F \Longrightarrow F(Kf) = \int_\Omega F \cdot Kf = 0,$$

$$|||$$

$$F = K(\lambda F) \equiv \begin{array}{l} -\Delta F = \lambda F \\ F = 0 \end{array} \equiv F = \varphi;$$

tzn. (H) má řešení právě tehdy, platí-li pro každou vlastní funkci φ:

$$0 = \int_\Omega \varphi \cdot Kf \underset{\uparrow \text{ viz } 1)}{=} \int_\Omega \underbrace{(K\varphi)}_{= \frac{1}{\lambda}\varphi} f = \int_\Omega \frac{1}{\lambda} \varphi f$$

a odtud již plyne dokazované tvrzení (X)

cbd.

Poznámka.

Buď $\lambda<0$ a $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u=0 \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \int \nabla u \nabla v = \int \lambda u v \\ \Downarrow \\ \int |\nabla u|^2 - \lambda u^2 = 0 \\ \qquad \vee| \\ \int |\nabla u|^2 = \|u\|^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow u = 0$$

Takže všechna vlastní čísla (*) jsou kladná!

Navíc – vlastní čísla jsou převrácené hodnoty vlastních čísel kompaktního operátoru K (a 0 zřejmě není vlastním číslem K!).

Proto lze všechna vlastní čísla (*) seřadit do posloupnosti (každé je zastoupeno tolikrát, kolik činí jeho -konečná- násobnost) tak, že

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$$

$$\lambda_n \to \infty$$

dá se ukázat, že platí ostrá nerovnost

a že první vlastní funkce nemění znaménko.

(Navíc platí: $\lambda_1 = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 : \int_\Omega v^2 = 1 \right\}$)

Pozorování. Všimněme si ještě jedné hezké vlastnosti výše definovaného operátoru K: je nezáporný!, tzn.

$$\forall u \in L^2(\Omega): \quad (Ku, u) \geq 0$$

(Dk. $Ku = v$

$\qquad\equiv$ a volme $w = v$

$$\begin{matrix} -\Delta v = u \\ v = 0 \end{matrix} \equiv \int \nabla v \nabla w = \int u w,$$

takže

$$\boxed{(Ku,u) = \int_\Omega u \cdot Ku = \int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega |\nabla v|^2 \geq 0}$$

cbd.)

$\exists\, \infty$ (ryzí nezáporných) vlastních čísel

- lineárního
- kompaktního
- samoadjungovaného
- nezáporného

Opakování lze říct něco navíc

Věta. (Courant–Weinsteinův variační princip)

Buď H reálný separabilní Hilbertův prostor, $\dim H = \infty$ a buď operátor $A : H \to H$ na H:

- lineární
- kompaktní
- samoadjungovaný
- nezáporný (tzn. $\forall u \in H: (Au, u) \geq 0$).

Seřaďme všechna vlastní čísla operátoru A do nerostoucí posloupnosti (každé uvádíme tolikrát, kolik činí jeho násobnost)

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\boxed{\lambda_n = \sup_{\substack{X \subset H \\ \dim X = n}} \min_{\substack{u \in X \\ \|u\| = 1}} (Au, u)}$$

(X je libovolný podprostor H dimenze n)

Důkaz. Už víme (viz Hilbert–Schmidtovu teorii na str. 7), že odpovídající posloupnost (ortonormalizovaných) vlastních prvků (e_n) tvoří ON-bázi H.

Buď $n \in \mathbb{N}$ dané a definujme

$$\boxed{\mu_n := \sup_{\substack{X \subset H \\ \dim X = n}} \min_{\substack{u \in X \\ \|u\| = 1}} (Au, u).}$$

Máme dokázat, že $\boxed{\mu_n = \lambda_n.}$

1) Nejdříve dokážeme, že $\boxed{\mu_n \geq \lambda_n}$

Buď $X_0 = \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Pak krijme

$$\mu_n \geq \min_{\substack{u \in X_0 \\ \|u\| = 1}} (Au, u)$$

Pro lib. $u \in X_0$, $\|u\| = 1$ platí

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1,$$

a proto

$$(Au, u) = \Big(\sum_1^n \alpha_i \underbrace{Ae_i}_{=\lambda_i e_i}, \sum_1^n \alpha_j e_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i (e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n .$$

Odtud plyne, že

$$\boxed{\mu_n \geq \min_{u \in X_0, \|u\|=1} (Au, u) \geq \lambda_n}$$

cbd 1)

17

2) Zbývá dokázat $\boxed{\mu_n \le \lambda_n}$

Buď $Y = \overline{\operatorname{Lin}\{e_i,\ i \ge n\}}$

$(\operatorname{codim} Y = n-1)$

A buď $X \subset H$ podprostor dimenze n.

Pak krajně $X \cap Y \neq \{0\}$, tzn. že

existuje $u \in X \cap Y$ takové, že $\|u\| = 1$.

Tedy $u \in Y$, a proto

$$u = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i e_i, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^2 = 1.$$

Odtud

$$\min_{\substack{v \in X \\ \|v\|=1}} (Av, v) \le (Au, u) = \left(\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i A e_i, \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_j e_j \right) = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2 \le \lambda_n \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^2 = \lambda_n,$$

a proto

$$\boxed{\mu_n = \sup_{\ldots} \min_{\ldots} (Av, v) \le \lambda_n}$$

Cbd 2)

Cbd.